

## **Estudo exploratório sobre as relações entre conhecimento conceitual, domínio de técnicas matemáticas e resolução de problemas em estudantes de licenciatura em Física**

**Ana Raquel Pereira de Ataíde<sup>1</sup> e Ileana María Greca<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Departamento. de Física, Universidade Estadual da Paraíba, Brasil, Email: [arpataide@uepb.edu.br](mailto:arpataide@uepb.edu.br). <sup>2</sup>Departamento. de Didáticas Específicas, Universidad de Burgos, Espanha. Email: [ilegreca@hotmail.com](mailto:ilegreca@hotmail.com)

**Resumo:** Nos últimos anos têm se destacado a importância da compreensão conceitual e sua ligação com a formalização matemática de conceitos, dado que a Matemática constitui-se no esqueleto que sustenta o corpo da Física, porém são escassas as pesquisas que discutam como estudantes avançados de cursos de Física entendem as equações matemáticas e qual o seu papel na aprendizagem de conceitos físicos. Este trabalho é um recorte de uma pesquisa mais ampla, que tem como objetivo investigar o papel da Matemática na compreensão de conceitos físicos e mais especificamente dos conceitos envolvidos na primeira lei da Termodinâmica. Os dados obtidos neste estudo descritivo, realizado com 22 estudantes do último ano do curso de Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba (Brasil), parecem mostrar a importância da compreensão não apenas dos conceitos ou das técnicas matemáticas isoladamente, mas sim da formalização matemática ligada à construção dos conceitos para que a aprendizagem ocorra de maneira efetiva. Isto se manifesta de forma mais evidente na resolução de problemas. Outro ponto que emerge deste estudo é que parece existir uma relação entre a aprendizagem de conceitos físicos e a resolução de problemas com a visão epistemológica que os estudantes têm do papel da Matemática na Física.

**Palavras-chave:** compreensão conceitual, formalização matemática, visões epistemológicas, estudantes de licenciatura em Física.

**Title:** Exploratory study on the relationships among conceptual knowledge, domain of mathematical techniques and visions of the Mathematics in the Physics and in the resolution of problems on the First Law of the Thermodynamics.

**Abstract:** In the last years, physics teaching researchers have stressed the relation between the conceptual comprehension and the mathematical formalism in the learning of physics, because Mathematics occupies the place of the internal structure in the body of the Physical science. Nevertheless, few studies argue how undergraduate advanced students of Physics understand mathematical equations and what is their role in the learning of physical concepts. This work is part of a broad research which investigates the role of mathematics in the comprehension of physical concepts related to the First Law of Thermodynamics. The data of this descriptive study deal with 22 students of the last year of a degree course

in Physics of State University of Paraíba (Brasil). The data was gathered by non-participate observation, a questionnaire with straight questions, regularly discipline's evaluation and individual interviews. The analysis shows that an effective learning requires a link between the mathematical formalism and the construction of concepts, and not only the isolated comprehension of concepts and/or the knowledge of mathematical techniques. This link seems to be more evident in problem solving. Also, it appears to be a relation between the learning of physical concepts and problem solving and how students understand the role of Mathematics in Physics theories.

**Keywords:** conceptual understanding, mathematical formalization, epistemic views, undergraduate physic students.

### **Introdução**

No ensino de Física, em qualquer nível, não é raro ouvir estudantes e professores reclamando de dificuldades na aprendizagem, dentre estas a que talvez tenha um maior apelo é aquela referente à relação entre a Física e a Matemática, ou seja, que os estudantes não aprendem Física devido aos seus frágeis conhecimentos de Matemática (Pietrocola, 2010; Redish, 2005). Embora o problema seja explícito sua solução torna-se complexa devido à falta de clareza quanto às características desta relação.

Nos níveis mais avançados do ensino, a necessidade de descrever os fenômenos físicos segundo uma determinada teoria ou mesmo resolver problemas referentes a ela requerem tanto a compreensão da teoria quanto sua formulação matemática. Ou seja, os estudantes deveriam ser capazes de identificar as propriedades físicas que servem para descrever os fenômenos e relacioná-las com as variáveis quantitativas que as representam (Hestenes, 2003). Este processo se denomina "modelização". Possivelmente a complexidade deste processo leva os estudantes à aprendizagem mecânica de conceitos e algoritmos (Greca e Moreira, 2001), fato que aparece de forma marcante na resolução de problemas, sobretudo quando é necessário um tratamento matemático um pouco mais sofisticado daquele a que estão habituados. De modo geral, apesar de habilidades matemáticas serem necessárias para uma compreensão mais completa da Física, elas não são suficientes, em si mesmas, para garantir o sucesso (Hudson e McIntiry, 1977). Além disso, alguns estudantes que parecem saber pouca Matemática quando solicitados nas aulas de Física, são bem sucedidos em suas aulas de Matemática (Redish, 2005).

Embora o tema seja muito relevante para o ensino de Física, a literatura sobre o assunto, relacionada com o ensino superior, não é muito ampla e está centralizada em alunos dos primeiros anos dos cursos de graduação. Romer (1993) considera que para ensinar os alunos do ensino médio é necessário ensiná-los a ler as equações da Física, porque, caso contrário, eles as verão como um monte de fórmulas matemáticas que faz pouco ou nenhum sentido. A resposta mais freqüente identificada por Martinez Torregrosa et al. (2006), ao estudarem as dificuldades dos alunos de graduação com cálculo diferencial, foi: "Eu sei como calculá-los, mas eu não sei o que eles querem dizer". Os alunos parecem acreditar que a matemática implica apenas em operações específicas com símbolos sem

sentido, a aprendizagem de uma forma mecânica. Assim, em uma proposta semelhante a de Romer, consideravam que era necessário, em primeiro lugar, para explicar aspectos conceituais de cálculo diferencial usá-lo em aplicações da Física.

Lozano e Cárdenas (2002) discutiram problemas de estudantes de graduação relativos à interpretação da linguagem simbólica utilizada na Física, por exemplo, a relação entre conceitos e grandezas que estão explícitas no sinal de igual: em Física, a igualdade tem significados diferentes, dependendo de seu contexto, embora os estudantes tendam a transferir as propriedades de igualdade aprendidas nas aulas de Matemática para o âmbito das fórmulas de Física. Redish (2005) reforçou esta ideia, salientando que, apesar de a Matemática poder ser a língua da Ciência, o Matemática-Física é um dialeto desse idioma. Físicos tendem a misturar Física Conceitual com símbolos matemáticos de uma maneira que tem um efeito profundo sobre a utilização e interpretação das equações.

Estes estudos sugerem que não existe uma resposta simples como a organização de novas aulas de Matemática para garantir que os alunos vão fazer bem a Física, que é uma solução bastante comum entre os professores de Física. Estas premissas falsas podem ser um fator por trás de um resultado típico detectado na resolução de problemas de Física entre alunos de graduação e pós-graduação: o uso de equações sem qualquer associação direta com os princípios da Física, as quais não necessitam de ser entendidas no contexto da Física, antes de serem aplicadas.

Por outro lado, poucos estudos têm considerado as visões epistemológicas de estudantes de graduação sobre a relação entre a Física e a Matemática e a influência destes pontos de vista sobre a compreensão do aluno ou o desempenho em Física. Quale (2011) examinou a associação entre o mundo físico observável e os modelos matemáticos da Física teórica. Pietrocola (2002, 2010), baseado na Filosofia e História da Ciência, discutiu a complexidade dessa relação e como ela pode influenciar o ensino e a aprendizagem da Física e Dormert et al. (2007) descreveram os componentes epistemológicos da mentalidade dos alunos no entendimento de equações de Física. Os resultados deste último estudo foram associados pelos pesquisadores com o método tradicional utilizado por muitos departamentos de Física para apresentar e avaliar o conhecimento dos estudantes, reduzindo equações de Física para pouco mais do que ferramentas matemáticas. Estes resultados são semelhantes aos encontrados por Redish et al. (1998) sobre as expectativas dos estudantes de introdução Física acerca das equações, que pareciam usar a Matemática apenas como uma maneira de calcular números.

Pela importância do tema, entendemos que mais pesquisas são necessárias, e nosso trabalho tem a intenção de adicionar alguns elementos novos para a compreensão do problema. O trabalho que apresentamos é um primeiro estudo neste sentido, tentando explorar de forma qualitativa os vários fatores que poderiam estar envolvidos na visão que os alunos têm do papel da Matemática na Física e a influência destas visões na sua compreensão conceitual. De forma mais específica, as perguntas que guiaram este estudo são as seguintes:

Quais são as dificuldades, matemáticas e conceituais, de estudantes avançados de Licenciatura em Física com a primeira lei da Termodinâmica? Que relações existentes entre a Física e a Matemática são consideradas pelos estudantes de Física? Como os entendimentos de tais relações influenciam na compreensão de conceitos físicos e, mais especificamente, de conceitos de Termodinâmica, sobretudo quando devem resolver problemas?

### **O papel da Matemática na Física**

Ao longo da história, matemáticos e físicos apresentaram ideias divergentes sobre o papel da Matemática no desenvolvimento da Física. O filósofo francês Michel Paty (1995), destaca três formas da Matemática se apresentar e de ser utilizada na construção do conhecimento físico. Essas formas são: a visão analógica, característica herdada da escolástica; a visão da matemática como língua que traduz o real, ou seja, o objeto de estudo da física, que podemos identificar nos escritos de Galileu; e a matemática como uma linguagem que está ligada intrinsecamente na construção do pensamento físico, característica que aparece no século XVIII com a elaboração explícita de conceitos físicos pensados matematicamente e que alcança seu ápice no século XX com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade e da Mecânica Quântica.

Na busca de esclarecimentos sobre a forma como ocorre a relação entre a Física e a Matemática e suas implicações no ensino desta disciplina, em 2001, Pinheiro, Pinho-Alves e Pietrocola, propõem a noção de Matemática como estruturante do conhecimento físico, como "esqueleto" que sustenta o "corpo" da Física.

A matemática fornece um conjunto de estruturas dedutivas, por meio das quais se expressam as leis empíricas ou os princípios teóricos da Física [...] ela é uma forma de linguagem e ferramenta, por meio da qual são estruturadas as relações entre os elementos constituintes de uma teoria (Pinheiro, Pinho-Alves e Pietrocola, 2001, p. 40).

Tratando a Matemática como uma linguagem, e desta forma trazendo a tona seu caráter interpretativo, pode-se diferenciar o saber científico do saber do senso comum, uma vez que a linguagem utilizada é uma importante forma de diferenciação entre estes dois saberes, pois a ciência normalmente vale-se da Matemática como forma de expressar seu pensamento. Embora a Matemática apresente, como toda linguagem, tanto características interpretativas como descritivas, Pietrocola afirma:

[...] Sua maior importância está no papel estruturante que ela pode desempenhar quando do processo de produção de objetos que irão se constituir nas interpretações do mundo físico (Pietrocola, M.; 2002, p. 100).

Neste sentido, a Matemática enquanto linguagem empresta sua estruturação ao pensamento científico para compor os modelos físicos sobre o mundo, e sua escolha enquanto estruturadora da ciência reside, entre outras coisas, nas suas características de precisão, universalidade e lógica dedutiva (ibid.). Esta posição corresponde com a terceira das visões apresentadas por Paty, pois o sentido de linguagem adotado por Pietrocola

não é o de tradução, mas sim como integrante da própria construção do conhecimento que ela expressa. Silva e Pietrocola (2003) mostram uma análise do desenvolvimento da teoria eletromagnética, na qual a matematização apresenta-se não como uma mera tradução da teoria para a linguagem matemática, mas como uma etapa integrante do processo de construção da teoria. Para tanto expõem como Thomson e Maxwell utilizaram a linguagem matemática como elemento estruturante da teoria eletromagnética e não como descrição de aspectos empíricos. Dessa forma, trazem a tona um exemplo da utilização da Matemática como estruturante do pensamento físico na construção de uma teoria física.

Assim, por se constituir na linguagem do conhecimento físico, a Matemática deve assumir um papel tão importante no ensino de Física, quanto tem no processo de construção deste conhecimento. No entanto, os professores de Física, ao manifestar que o maior problema para a aprendizagem de sua disciplina são os frágeis conhecimentos matemáticos que os estudantes possuem, mostram um posicionamento epistemológico ingênuo, onde a Matemática apresenta-se apenas como uma ferramenta a ser utilizada pela Física na resolução de seus problemas e esta visão se propaga entre os estudantes inculcando neles a impressão de que conhecendo a expressão matemática e a forma como resolvê-la consegue-se sair muito bem em Física. Essa posição ingênua apresenta características de duas das visões explicitadas por Paty, da visão analógica e da Matemática como tradutora dos fenômenos físicos, sendo esta última mais evidente. Essas visões podem se constituir em obstáculos pedagógicos (Pietrocola, 2002) para a aprendizagem dos conceitos físicos. A visão ingênua é alimentada também pelos livros didáticos, uma vez que estes raramente apresentam uma exposição de conteúdo e atividades problemas que fujam deste instrumentalismo da Matemática já consolidado no ensino de Física. Portanto, é possível que o "instrumentalismo" que se observa em muitos estudantes durante a resolução de problemas não seja devido unicamente às dificuldades cognitivas que o processo de modelização exige, mas também a uma visão epistemológica inadequada e persistente.

### **O estudo**

Com o intuito de compreender a influência da relação entre a Física e a Matemática na aprendizagem de conceitos físicos, escolhemos a primeira lei da Termodinâmica, tal como apresentada a estudantes do sétimo semestre da Licenciatura em Física na Universidade Estadual de Paraíba (Brasil). O tratamento matemático da primeira lei da Termodinâmica, a este nível é diferente de Física Geral, este envolve conceitos de diferencial e derivadas, total e parcial, os quais são os principais conceitos matemáticos para a compreensão de qualquer área da Física da matéria contínua e estudantes avançados de Física devem expressar claramente seu entendimento sobre estes conceitos matemáticos, bem como acerca do papel da Matemática na construção dos conceitos da Física. Fizemos esta escolha por varias razões.

1) As pesquisas sobre os conceitos envolvidos na primeira lei mostram que estudantes universitários apresentam sérias dificuldades com eles, em parte devido a que esses conceitos assumem conotações diferentes no contexto da formulação científica e no seu uso cotidiano (Carlton, 2000; Coelho, 2009; Goedhart e Kaper, 2002; Cotignola et al., 2002).

2) A formalização dada à primeira lei, nesse estágio da formação, exige utilizar um tratamento matemático para modelar e resolver problemas, diferente daquele usado nas Físicas Gerais.

3) Envolve os conceitos de diferencial e de derivadas parciais e totais, que são chaves na compreensão de qualquer área da Física do contínuo.

4) Estudantes avançados da Licenciatura em Física poderiam mostrar visões epistemológicas consolidadas sobre a relação entre a Matemática e a Física.

### **Metodologia**

O estudo é qualitativo, com um caráter descritivo, dentro da tradição dos estudos de caso (Wolcott, 1992; Stake, 1994). Foi realizado com duas turmas, 22 estudantes, do último ano (sétimo período) do curso de Licenciatura em Física da Universidade Estadual da Paraíba, matriculados na componente curricular Termodinâmica, nos semestres 2009.1 e 2010.1. Por apresentarem as mesmas características gerais, entre elas, professor da disciplina, método de ensino, livro didático utilizado e percurso acadêmico dos estudantes, agrupamos os 22 alunos em um único grupo, o qual se constitui como o nosso caso. Ressaltamos que o professor da disciplina não participou da pesquisa; o primeiro autor deste trabalho acompanhou na disciplina sem participar do ensino dela. No desenvolvimento deste estudo, seguimos as etapas descritas a seguir:

Acompanhamento das aulas da componente curricular Termodinâmica, através da observação não participante.

Elaboração de um questionário baseado nas reclamações dos estudantes do curso de física quanto às dificuldades de trabalhar a termodinâmica com um tratamento matemático mais elaborado e qual a visão que têm do papel da matemática na física e na resolução de problemas de física que foi passado ao final do da primeira lei (Anexo I).

Análise das atividades avaliativas realizadas pelo professor da disciplina (Anexo II).

Entrevistas semi-estruturadas individuais com todos os estudantes. As perguntas das entrevistas foram guiadas pelas respostas dadas ao questionário inicial, suas atividades avaliativas e pelas nossas notas de campo da observação de seu desempenho e dificuldades em sala de aula durante todo o semestre.

Desta forma, como objetos de pesquisa, elegemos quatro tipos de materiais distintos:

As anotações realizadas durante o acompanhamento das aulas da componente curricular, focadas nas dificuldades apresentadas e perguntas realizadas pelos estudantes ao professor durante a exposição do conteúdo e a resolução de problemas.

Um questionário, com perguntas diretas, acerca das dificuldades que estavam tendo na aprendizagem da disciplina e especificamente na resolução de problemas, e da visão que os estudantes, egressantes do curso de Licenciatura em Física, têm do papel da Matemática na resolução dos problemas de Física. O questionário encontra-se no anexo I.

Duas atividades avaliativas por estudante, compostas por perguntas teóricas e problemas, as quais se encontram no anexo II, propostas pelo professor regular da disciplina referentes à primeira unidade didática, que integra o estudo introdutório à termodinâmica, temperatura, sistemas termodinâmicos, calor e primeira lei da termodinâmica.

Entrevista individual com os estudantes, com o objetivo de esclarecer as dificuldades que detectamos na resolução dos problemas e sobre as estratégias utilizadas para resolvê-los, bem como a visão que têm de algumas estruturas e símbolos matemáticos importantes na compreensão de conceitos de Termodinâmica.

A análise dos materiais obtidos foi realizada seguindo os seguintes passos:

Identificação das dificuldades dos estudantes nas aulas, de acordo com o que eles responderam nos questionários;

Identificação das dificuldades nas atividades avaliativas, tomando como base as observadas nas aulas e as expostas por eles, e classificação dos estudantes quanto ao rendimento acadêmico relativo às duas atividades avaliativas analisadas. Nesse momento, surge à necessidade de validação dos dados, por isso as atividades foram corrigidas e as dificuldades comentadas pelo professor da componente curricular, pela pesquisadora e por dois outros professores doutores do departamento de Física da UEPB;

Comparação das dificuldades expostas pelos alunos no questionário, com as observadas durante as aulas e nas atividades avaliativas.

Análise das respostas dadas nas entrevistas, através da descrição de características dos estudantes quando resolvem problemas, e posterior comparação com as resoluções dos problemas propostos nas atividades avaliativas, categorização quanto à característica mais marcante na resolução de problemas.

Análise das respostas dos estudantes quanto à visão sobre o papel da matemática na aprendizagem de uma teoria física e posterior categorização, adaptando a classificação proposta por Karam (2007).

## **Resultados**

Apresentamos a seguir uma descrição geral do desempenho, dificuldades e respostas apresentadas pelos estudantes relacionadas com a primeira lei da Termodinâmica. Feito isto, os estudantes foram categorizados segundo uma série de categorias que parecem descrever diferentes aspectos da relação entre a Física e a Matemática na aprendizagem dos conceitos envolvidos na primeira lei. A categorização foi realizada de forma independente pelos dois autores deste trabalho e posteriormente as diferenças acertadas por consenso. As categorias foram posteriormente convertidas em variáveis sobre as que realizamos uma tabela de contingência e uma análise de correspondências múltiplas, visando determinar possíveis relações entre os diversos fatores discutidos na primeira parte da análise.

1) *Análise dos diferentes materiais*

A) *Atividades avaliativas*

De modo geral, os estudantes apresentaram um rendimento entre bom e regular nas atividades avaliativas propostas pelo professor da disciplina para a área que estudamos, que são, como pode se observar no Anexo II, atividades típicas do curso de Física para este nível. Oito alunos conseguiram um rendimento superior a 60%, sendo que a pontuação máxima atingida foi de 80%. Seis estudantes apresentaram rendimento entre 60% e 50%, e os demais, rendimento inferior a 50%, tendo um limite inferior de 30%. Da análise das respostas dadas aos problemas propostos nas atividades identificamos algumas características que indicam as estratégias utilizadas na resolução de problemas.

No universo dos oito estudantes que obtiveram maior sucesso na atividade, cinco deles tiveram a preocupação de estruturar a resolução do problema, ou seja, identificar variáveis, relacionar as informações apresentadas no problema, bem como no processo de resolução, descrever cada passo dado neste sentido. Quando indagados durante a entrevista acerca das estratégias utilizadas nas resoluções, justificaram que para eles era necessária uma organização, pois isso facilitava a compreensão do que se desejava obter ao final do processo.

[...] a equação matemática é importante, mas nem sempre pensamos no problema como um todo e queremos resolver usando apenas uma determinada equação, se não nos preocuparmos em identificar se ela atende as situações específicas expostas no problema podemos nos sair mal [...] (E6).

Dentre os três outros estudantes melhor sucedidos, dois deles utilizaram as equações como base e aplicaram as técnicas para resolvê-las, e um deles apresentou como estratégia de resolução uma preocupação maior com os conceitos e utilizou a Matemática com um instrumento apenas para encontrar um resultado final, como deixou claro:

[...] Os conceitos são a minha principal preocupação quando tenho um problema para resolver [...] uso a Matemática como uma ferramenta para concretizar estes conceitos [...] (E13).

Oito estudantes do universo investigado, os quais correspondem aos de menor rendimento na disciplina, parecem colocar as fórmulas que poderiam ser utilizadas para resolver o problema e testaram-nas até encontrar uma que lhes permitisse obter o resultado desejado, o que conseguiram em algumas ocasiões. Esta forma de resolução, amplamente discutida na literatura de resolução de problemas, parece indicar uma forte tendência a utilizar a Matemática apenas como um instrumento útil para a resolução de problemas sem preocupação em relacioná-la com os conceitos físicos envolvidos, como podemos perceber na fala destes estudantes.

[...] para mim é mais fácil partir da fórmula matemática e depois encaixar os valores que foram dados no problema [...], quando não estão todos presentes tento com todas as fórmulas expostas até encontrar [...] (E10).



[...] a matemática é para mim a parte inicial para resolver um problema, facilita a resolução e nos leva a uma resolução total [...](E20).

Quanto às respostas dadas às questões teóricas observamos que apenas três estudantes responderam corretamente todas as questões, onze estudantes responderam parcialmente as questões e oito estudantes não responderam corretamente ou as deixaram sem respostas. Estas questões versavam sobre a definição de variáveis microscópicas e macroscópicas e as relações existentes entre estas variáveis, o conceito de energia interna e a definição da primeira lei da Termodinâmica.

#### B) Questionário

Em relação às respostas dadas ao questionário (Anexo I) sobre suas dificuldades com o conteúdo estudado, 27,3 % dos entrevistados afirmaram não ter dificuldades com a primeira lei; no entanto, 72,7% assumiram apresentar algum tipo de dificuldade:

Dificuldades com a Matemática: 43,8% dos estudantes afirmaram ter problemas na aplicação da Matemática, seja com os cálculos matemáticos, aplicações de fórmulas ou com a construção e interpretação de gráficos:

Quando considero o tratamento, como eu poderia aprender determinado conteúdo de Física que esteja com um tratamento matemático que nem estudei ainda? (E1).

[...] tenho muitas dificuldades com algumas ferramentas da Matemática, como a integral e as derivadas e dessa forma não consigo resolver os problemas (E2).

Minha maior dificuldade é com a Matemática, muitas vezes apesar de compreender conceitos na hora de aplicar a Matemática e resolver os problemas me complico (E22).

Dificuldades com o conceitual (Teoria): 31,3% dos alunos afirmaram apresentar dificuldades em compreender a parte conceitual do conhecimento físico e sua relação com a quantificação do fenômeno:

A parte conceitual da disciplina requer um entendimento mais profundo da natureza dos fenômenos, o que dificulta a compreensão e reflete na resolução e entendimento dos problemas [...] (E13).

Tenho dificuldade de fazer a ponte em entre a parte conceitual e as fórmulas matemáticas (E4).

[...] minha dificuldade é que não consigo me lembrar dos conceitos vistos na Física básica e quando lembro não sei utilizar na nova abordagem da Termodinâmica [...] (E21).

Dificuldades na junção entre o conceitual e a Matemática: 24,9% dos estudantes consideraram que sua maior dificuldade reside na interpretação e compreensão do problema proposto, em onde e como usar determinado ferramental matemático.

Às vezes tenho dificuldade na aplicação das fórmulas, fico muitas vezes sem saber em que situação usar cada uma delas (E5).

Na parte de entender o que as questões estão pedindo (E6).

Tenho muitas dificuldades, mas sei utilizar os princípios básicos de cálculo, derivadas e integrais, o que dificulta é juntar tudo isso com os conceitos e conseguir resolver os problemas de Termodinâmica [...] (E18).

Na análise destas respostas percebemos que a maior parte dos estudantes apresenta dificuldades com a Matemática, pelo menos em relação ao conteúdo estudado neste trabalho. Quando indagamos, durante a entrevista, se as dificuldades com a Matemática interferem na aprendizagem de Física, e em que grau ocorre essa interferência, todos os estudantes, mesmo os que afirmam não ter dificuldades, consideram que elas interferem diretamente na aprendizagem. Alguns deles são mais contundentes e afirmam ter certo tipo de bloqueio quando solicitados a resolver problemas e culpam a Matemática por essa reação.

### C) Entrevistas: em busca de esclarecimentos

Na entrevista, tentamos esclarecer alguns pontos, tanto conceituais como procedimentais, que apareceram na análise das atividades avaliativas e na observação de sala de aula. Os resultados das entrevistas aparecem estruturados a partir desses pontos que tentamos esclarecer.

1) O estudante entende o que são variáveis microscópicas e macroscópicas? Compreende as relações existentes entre essas variáveis?

Durante a entrevista treze estudantes mostraram que entendem os dois tipos de variáveis, no entanto embora apresentem esta visão geral do que sejam tais variáveis, eles não compreendem as relações existentes entre elas. Seis estudantes não compreendem o que são variáveis microscópicas e macroscópicas e apenas três dos estudantes entrevistados além de responder adequadamente o que representam essas variáveis explicaram como elas se relacionam.

2) O estudante compreende o que é Temperatura, Calor e Energia Interna?

O conceito de temperatura, embora básico no estudo da Termodinâmica parece continuar sendo um dos mais confusos para grande parte dos estudantes pesquisados. Assim, dez estudantes definiram temperatura como uma grandeza que indica o grau de vibração molecular, quatro estudantes a associaram a energia cinética interna do sistema, três estudantes afirmaram que a temperatura é definida como a medida da energia interna do sistema, três estudantes ligaram o conceito de temperatura com calor e dois estudantes afirmaram que temperatura é apenas uma característica que provem da propriedade da matéria.

Quando indagados acerca do conceito de calor, quatro estudantes associaram o calor à diferença de temperatura só que desvinculada de trocas para se chegar a um equilíbrio térmico, dois estudantes trataram o calor como uma medida de temperatura, enquanto que dezesseis estudantes conceituaram calor como energia em trânsito. Dentro deste universo, oito afirmaram que esse trânsito ocorre em um único sentido, dois estudantes consideraram que ele pode ocorrer em sentido duplo e seis estudantes não trataram do sentido que ocorre esse trânsito.

Em relação à energia interna, doze estudantes mostraram a partir de suas respostas que compreendem bem o conceito e expressam essa compreensão quando indagados diretamente, sete apresentaram respostas que indicam um entendimento parcial do conceito, um estudante mostrou nas respostas às questões da prova que entende o conceito, no entanto quando indagado diretamente não soube responder e dois estudantes não compreendem o conceito de energia interna. No entanto, apesar da grande maioria mostrar um entendimento, estes afirmam não saber relacioná-la com outras grandezas macroscópicas.

3) O estudante entende o que representa o sinal de igualdade (=) na equação da primeira lei da Termodinâmica?

Quatro estudantes, durante a entrevista afirmaram que utilizam a equação sem a preocupação de entender suas componentes, pois consideram que uma vez que se representa matematicamente uma lei é por que ela já está provada; dois outros estudantes explicaram as variações expressas na equação, mas não as remetem à conservação. A estes estudantes atribuímos um não entendimento da representação do sinal de igualdade. Os dezesseis estudantes restantes apresentaram respostas que conduzem ao significado de conservação de energia, e que o sinal de igualdade serve para formalizar essa conservação. Embora este resultado seja significativo, a maior parte destes estudantes (dez) afirmou não perceber claramente como ocorrem as relações entre grandezas macroscópicas e microscópicas, o que se constitui em uma incoerência já que a equação da primeira lei da Termodinâmica expressa uma relação deste tipo. Quanto a esta posição dos estudantes percebemos uma dificuldade em relacionar não só as grandezas microscópicas e macroscópicas, mas de identificar, como afirma (Contignola et al. 2002), a representação da igualdade como uma fronteira entre o sistema estudado ( $E_{int}$ ) e os sistemas que agem sobre ele ( $Q + W$ ).

4) O estudante entende a ideia de diferencial?

Nas observações em sala de aula e na análise das atividades percebemos a grande dificuldade quando do entendimento das diferenciais e estas dificuldades tornaram-se mais evidentes na utilização de derivadas parciais e totais. Nas entrevistas detectamos que apenas sete estudantes entendem a ideia de diferencial, os quinze estudantes restantes afirmam apenas saberem as técnicas, fazendo uso destas apenas como um instrumento na resolução de problemas.

[...] não entendo qual a diferença entre o uso de diferenciais total e parcial e também não sei quando utilizar uma ou outra [...] (E22).

[...] quando necessário resolvo equações diferenciais, derivadas, represento grandezas através de diferenciais, mas não entendo qual a ideia por trás do diferencial [...] (E16).

Da junção destas duas perguntas podemos inferir sobre a compreensão dos estudantes acerca da primeira lei da Termodinâmica ao perguntarmos: O estudante compreende a Primeira Lei da Termodinâmica?

Analisando as respostas dos estudantes às duas perguntas anteriores, percebemos que, de modo geral, dezesseis estudantes não compreendem

mais amplamente a primeira lei da Termodinâmica, uma vez que não entendem o sinal de igualdade de sua formulação, não compreendem as relações entre grandezas microscópicas e macroscópicas e tampouco entendem a ideia de diferencial, o que nos leva a concluir que a primeira lei da Termodinâmica não é compreendida por estes estudantes.

5) O estudante aplica adequadamente os conceitos matemáticos na resolução dos problemas?

Para tentar responder esta pergunta, partimos da resolução feita pelos estudantes nas atividades avaliativas e pedimos que explicassem como as tinham resolvido. Percebemos que oito estudantes aplicam adequadamente os conceitos matemáticos nas resoluções de problemas, e quatorze estudantes não fazem uma aplicação adequada embora alguns deles conseguissem resolver os problemas, pois, como eles mesmos afirmaram, "decoram os passos da resolução", demonstrando que percebem este conceitual matemático como uma técnica que uma vez dominada serve como instrumento para resolver os problemas. Destacamos que um dos estudantes que na resposta anterior foi classificado como um estudante que entende a ideia de diferencial, quando passa a ter a necessidade de aplicá-lo não consegue fazê-lo adequadamente.

6) Como o estudante utiliza a Matemática na resolução dos problemas?

Este último questionamento aparece como uma tentativa de perceber como os estudantes vêem a função da Matemática e como a utilizam na resolução de problemas de Física. Identificamos nove estudantes que a percebem como um instrumento útil na resolução de problemas, seis estudantes a vêem como um elemento facilitador na resolução, quatro estudantes percebem a Matemática como um elemento que dificulta o processo e três estudantes afirmam utilizarem a Matemática como um elemento que ajuda a provar a teoria. No entanto, como vimos nas respostas aos questionários, as dificuldades na compreensão do tratamento matemático ou sua relação com os conceitos físicos foram às dificuldades mais destacadas.

## *2) Categorização*

A partir destes resultados decidimos categorizar aos estudantes de duas maneiras diferentes, tendo em consideração duas de nossas perguntas de pesquisa relativas às relações percebidas pelos estudantes entre a Física e a Matemática e como os entendimentos de tais relações influenciam na compreensão de conceitos físicos e, mais especificamente, de conceitos de Termodinâmica, sobretudo quando devem resolver problemas. Assim, a primeira categoria que aparece a seguir está relacionada com a característica mais marcante que identificamos na resolução de problemas dos alunos (a partir de sua forma de resolução dos problemas das atividades avaliativas, do trabalho em sala de aula e de suas respostas nas entrevistas). A outra categoria está relacionada com a visão da função da Matemática na Física que tem os alunos, categoria emergente das respostas dadas pelos estudantes no questionário e durante o aprofundamento nas entrevistas. Além disso, caracterizamos os estudantes, em categorias que resumem a descrição feita na seção anterior. Assim, estas categorias levam em consideração sua conceituação física do conteúdo, sua compreensão

matemática e física do conceito de diferencial e sua aplicação na resolução de problemas e seu rendimento acadêmico.

a) Categorização em relação à característica mais marcante nas estratégias utilizadas na resolução de problemas:

1) Operacionalidade Matemática (OM): Estudante que utiliza a Matemática como uma técnica e que tende a resolver os problemas por tentativa e erro, ou por repetição de um problema resolvido pelo professor ou exposto em livros textos.

2) Conceituação (C): Estudantes que privilegiam a compreensão conceitual e tentam, nem sempre com êxito, fazer uma ligação dos conceitos com a Matemática a ser utilizada na resolução dos problemas.

3) Raciocínio matemático (RM): Estudante que utiliza um raciocínio matemático coerente com a situação exposta na resolução dos problemas, ou seja, utiliza estratégias de modelagem, embora em alguns casos não trabalhem muito adequadamente com as técnicas.

Entendemos ser necessário diferenciar-mais claramente a (OM) e a (RM). Para tanto usaremos como exemplo um problema proposto em uma atividade avaliativa e a resolução deste feita por dois estudantes classificados nestas duas categorias (Figuras 1 e 2).

Problema Proposto:

A tensão em um fio metálico é aumentada quase estaticamente e isotermicamente de  $\tau_i$  a  $\tau_f$ . Se o comprimento, a área da seção transversal e o módulo de Young isotérmico do fio metálico permanecem praticamente constantes. a) Determine o trabalho realizado e b) Se o fio tem um comprimento de 1m e área de seção transversal de  $0,001 \text{ cm}^2$ , sabendo que a tensão é aumentada quase estática e isotermicamente a  $20^\circ\text{C}$  de 10N até 100N. Qual é o trabalho realizado se o módulo de Young isotérmico a  $20^\circ\text{C}$  é  $1,23 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ ?

Respostas dos estudantes:

Handwritten student solution for problem a):

4-

a)  $dw = dQ - du$

Sei que:  $\gamma = \frac{L}{A} \left( \frac{\sigma}{L} \right) \rightarrow$  módulo de Young

Se fazer ???  $w = \frac{L}{2Ay} (\tau_f^2 - \tau_i^2)$  Lição

b)  $w = \frac{L}{2Ay} (\tau_f^2 - \tau_i^2) = \frac{1m}{2 \cdot (1,23 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2) \cdot (0,001 \text{ cm}^2)} \cdot (100^2 - 10^2) = 0,4 \text{ N}\cdot\text{m} \Rightarrow w = 0,4 \text{ J}$

$L = 0,001 \text{ cm}^2 \rightarrow$  TRANSFORMA EM METRO  $L = 1m$

$\tau_i = 10N$

$\tau_f = 100N$

$\gamma = 1,23 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

$A = 1m$

Figura 1.- Estudante (E7), classificado como um estudante que tem como característica mais marcante na resolução do problema a (OM).

4- a)  $h, A, Y, \tau$  permanecerem constantes, então:

$$d\tau = \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_h dT + \left(\frac{\partial \tau}{\partial h}\right)_T dh \Rightarrow d\tau = \left(\frac{\partial \tau}{\partial h}\right)_T dh = \frac{d\tau}{dh} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial L}\right)_T$$

Agora posso substituir na expressão do módulo de Young

$$Y = \frac{h}{A} \left(\frac{\partial \tau}{\partial h}\right)_T, \text{ fazendo a expressão desta forma:}$$

$$Y = \frac{h}{A} \left(\frac{d\tau}{dh}\right) \Rightarrow dh = \frac{d\tau \cdot h}{YA}$$

Sei que a expressão do trabalho é dado por  $dw = \tau dh$   
então apenas substituo a expressão acima na expressão do trabalho para o fio, teremos:

$$dw = \frac{\tau h}{YA} d\tau$$

Integrando da tensão inicial a final:

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} dw = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{h}{YA} \tau d\tau \Rightarrow w = \frac{h}{YA} \int_{\tau_i}^{\tau_f} \tau d\tau \dots$$

$$\Rightarrow w = \frac{h}{YA} \cdot \frac{1}{2} [\tau^2]_{\tau_i}^{\tau_f} \Rightarrow w = \frac{h}{2YA} (\tau_f^2 - \tau_i^2)$$

b)  $h = 1m$   
 $A = 0,001m^2$   
 $\tau = 202 = \tau_f$   
 $\tau_i = 10N$   
 $Y = 100N$   
 $Y = 1,23 \cdot 10^{11} N/m^2$

$$w = \frac{h}{2YA} (\tau_f^2 - \tau_i^2) \Rightarrow w = \frac{1}{2(0,001)(1,23 \cdot 10^{11})} (100^2 - 10^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = 0,4 J$$

Figura 2.- Estudante (E5), que apresenta como característica mais marcante na resolução do problema o (RM).

A forma apresentada pelo estudante E7 para resolver o problema mostra a falta de habilidade e de compreensão do sistema exposto. Isto ficou confirmado quando ele foi indagado sobre que estratégias usou na resolução, e este afirmou que não sabia chegar à formulação para o trabalho realizado no sistema, no entanto lembrava-se de sua expressão demonstrada em um dos livros que estava utilizando para estudar e, dessa forma, "tentou salvar" a questão apostando na resolução do item b), uma vez que este era apenas de substituição direta.

Por outro lado, o estudante E5, apresenta uma forma mais estruturada de resolução, este constrói a formulação do sistema tentando ligar a Matemática com o que foi exposto na descrição e com os conceitos envolvidos e, desta maneira, percebe-se que ele vai além da operacionalidade, utiliza um raciocínio matemático na formalização do problema.

b) Categorização em relação à visão dos estudantes sobre o papel da Matemática na aprendizagem de uma teoria física, adaptando a classificação proposta por Karam & Pietrocola (2008):

1) Ferramenta: a Matemática é utilizada como instrumento facilitador ao físico nos cálculos numéricos.

A matemática é um instrumento abstrato necessário para a comprovação dos conceitos físicos. A matemática é uma ferramenta fundamental (E7).

O cálculo inicialmente foi criado por Newton para resolver problemas físicos. Dessa forma, a Matemática é utilizada como objeto usado para facilitar a resolução dos problemas propostos (E8).

A Matemática é uma ferramenta que usamos para quantificar e calcular informações úteis para a Física (E20).

A Matemática serve apenas para dar resultados concretos na resolução de problemas, é um instrumento que a Física usa para resolver problemas (E21).

2) Linguagem: a Matemática é um tradutor do pensamento físico para o mundo, uma mera manifestação da Física, com a função de representá-la de forma entendível.

A Matemática, na Física, desempenha o papel de uma linguagem que é utilizada para modelar e descrever os fenômenos físicos (E1).

A Matemática é fundamental, mas não é tudo na Física, ela serve para traduzi-la em números (E2).

A Matemática é como uma língua usada para expressar à Física (E18).

3) Estrutura: a Matemática configura-se como estruturante do próprio pensamento físico.

A Matemática tem uma função fundamental na Física, ela é a base estrutural, é como o esqueleto do nosso corpo. (E5).

A Física e a Matemática caminham juntas, a Matemática é a base para os conceitos físicos, e muitas vezes ela surge da necessidade de explicação para conceitos físicos [...] (E19).

[...] apesar de ser muito diferente da Física, a Matemática é fundamental na construção de conceitos desta ciência [...] (E15).

c) Categorização em relação à conceituação física.

1) Aceitável (A): Estudante apresenta, no conjunto de suas respostas, um entendimento aceitável da conceituação física e dos conceitos físicos utilizados quando comparados aos conceitos cientificamente aceitos.

2) Regular (R): Estudante apresenta uma compreensão mediana da conceituação física.

3) Pobre (P): Estudante que não compreende, nem domina a conceituação física necessária do tema estudado.

d) Categorização em relação à compreensão matemática dos conceitos básicos para esta área do cálculo diferencial.

1) Aceitável (A): Estudante que compreende os conceitos básicos do cálculo diferencial.

2) Regular (R): Estudante que compreende alguns aspectos dos conceitos básicos do cálculo diferencial.

3) Pobre (P): Estudante que não compreende os conceitos básicos do cálculo diferencial, embora em alguns casos consiga aplicar técnicas.

e) Categorização quanto à compreensão do conceito de diferencial e aplicação apropriada nos problemas.

1) Aceitável (A): Estudante que compreende o conceito de diferencial e aplica-o adequadamente na resolução dos problemas.

2) Regular (R): O estudante apresenta uma compreensão regular do conceito de diferencial e/ou sua aplicação na resolução dos problemas.

3) Pobre (P): Estudante que não compreende o conceito de diferencial, nem domina sua aplicação.

f) Categorização quanto ao rendimento acadêmico neste conteúdo.

Nesta categorização expusemos o rendimento do estudante nas atividades avaliativas analisadas. Dividimos o rendimento em três faixas de desempenho: I) Alto (Superior aos 60% - entre 65% e 80%), ou seja, alunos que aprovaram disciplina com desempenho notável; II) Médio (entre 50% e 60%), ou seja, alunos que aprovaram a disciplina com as notas mínimas e III) Baixo (inferior aos 50% - Entre 45% e 30%), ou seja, alunos que reprovaram.

Na tabela 1 aparecem resumidas estas categorizações.

### *3) Discussão dos resultados*

Da Tabela 1 pode-se observar que seis estudantes (E4, E5, E6, E13, E14 e E15) possuem os conhecimentos matemáticos necessários para essa área de estudo e apresentam ideias bastante claras quanto aos conceitos físicos, conseguindo fazer a ligação entre essas ideias e a formalização matemática. Estes estudantes apresentam também suas ideias atreladas à visão de uma relação estreita entre a Física e a Matemática onde a segunda assume um papel de estrutura para a primeira, ainda que não tenham muita clareza na percepção das relações entre estas duas áreas de conhecimento. Estes estudantes estão entre os que apresentaram menores dificuldades na aprendizagem e um melhor desempenho.

Em contraposição, os estudantes com menores rendimentos nessa área (E7, E8, E9, E10, E11, E20, E21 e E22), dominam as "técnicas" matemáticas, mas não possuem uma compreensão adequada dos conceitos físicos, nem da relação existente entre a Matemática e a construção desses conceitos. Sua característica principal na resolução de problemas é a operacionalidade matemática, isto é, usam como estratégia de resolução a tentativa e erro - colocação das equações e por tentativa ver a que melhor se adapta no processo de resolução. Estes alunos até conseguem resolver alguns problemas, mas, ao que parece, de forma aleatória. O interessante é que todos estes alunos possuem uma visão da Matemática como ferramenta para o estudo da Física; a Matemática parece ter somente uma função de instrumento da Física, o que ficou explícito nas respostas diretas durante as entrevistas. É possível que essa visão, da Matemática como ferramenta, provavelmente construída durante o contato com a Física em sua formação,



e muitas vezes reforçada por professores e manuais didáticos, seja um elemento de obstrução da aprendizagem.

Estudante	Conceituação física	Compreensão Matemática dos conceitos do cálculo diferencial para este área	Compreensão Física do conceito de diferencial e aplicação	Característica mais marcante na resolução de problemas	Visão do papel da matemática na física	Rendimento acadêmico neste conteúdo
E1	R	S	S	C	Linguagem	M
E2	R	T	T	C	Linguagem	M
E3	R	S	T	C	Estrutura	M
E4	A	S	S	RM	Estrutura	Al
E5	A	S	S	RM	Estrutura	Al
E6	R	S	S	RM	Estrutura	Al
E7	R	T	T	OM	Ferramenta	B
E8	P	T	T	OM	Ferramenta	B
E9	P	T	T	OM	Ferramenta	B
E10	P	T	T	OM	Ferramenta	B
E11	P	T	T	OM	Ferramenta	B
E12	R	T	T	OM	Ferramenta	M
E13	A	S	T	C	Ferramenta	Al
E14	R	S	S	RM	Estrutura	Al
E15	A	S	S	RM	Estrutura	Al
E16	R	S	T	OM	Estrutura	Al
E17	R	T	S	OM	Ferramenta	Al
E18	A	T	T	C	Linguagem	M
E19	R	T	T	OM	Estrutura	M
E20	P	T	T	OM	Ferramenta	B
E21	P	T	T	OM	Ferramenta	B
E22	P	T	T	OM	Ferramenta	B

Tabela 1.- Resumo das categorizações dos estudantes. Códigos utilizados: A: Aceitável; R: Regular; P: Pobre; S: Sim; T: Usa apenas habilidade técnica; C: Conceituação; RM: Raciocínio matemático; OM: Operacionalidade matemática; Al: Alto; M: Médio; B: Baixo.

Os seis estudantes restantes, (E1, E2, E3, E12, E18 e E19), tiveram um desempenho regular, dominam as técnicas matemáticas, mas, embora a maioria (cinco estudantes) parecesse mostrar durante a entrevista uma forte ligação com a conceituação, entendendo a conceituação como uma grande valorização da teoria, sua compreensão dos conceitos físicos é regular, deixando, em geral, em segundo plano a matematização, o que parece se configurar também como dificuldade na aprendizagem. Por outro lado, os três outros estudantes apresentaram fortemente a característica da operacionalidade matemática, apresentando também uma compreensão regular dos conceitos físicos. Quanto à visão da relação entre a Matemática e a Física, para três deles, a Matemática funciona como uma tradução dos fenômenos físicos. Dois consideram que a função da Matemática é de uma

ferramenta a serviço da Física, enquanto cinco deles consideram-na como estrutura para a Física. Embora estes estudantes afirmem ter essa visão parece que ela não contribui para uma atitude diferenciada durante a resolução de problemas uma vez que dois deles apresentaram como estratégia principal a operacionalidade matemática e outro a conceituação, o que pode indicar uma falta de coerência entre a visão epistemológica da relação entre a Matemática e a Física e uma falta de habilidade de como utilizá-la na prática.

Dois estudantes, E16 e E17, apresentam um comportamento, a partir das categorizações, diferenciado dos demais. Por esse motivo, optamos por tratar esses casos separadamente. Os dois estudantes tiveram um rendimento superior a 60%, e a característica mais marcante ao resolverem problemas à operacionalidade matemática.

Quanto à visão da relação entre a Matemática e a Física, um considera a Matemática como uma ferramenta a serviço da Física, enquanto outro a considera como estrutura para a Física. Faz-se necessário esclarecer que eles apresentaram um grande domínio de técnicas matemáticas e tal habilidade domina e destaca-se em relação às outras, durante a resolução dos problemas, o que nos parece tê-los conduzido a um bom resultado.

Para verificar estes resultados utilizamos duas técnicas estatísticas descritivas relacionadas, que permitem estudar variáveis categóricas. Por uma parte, usamos as tabelas de contingência, que servem para registrar e analisar o relacionamento entre duas ou mais variáveis categóricas. Por outra, usamos a Análise de Correspondências múltiplas, que é uma técnica que se aplica a análise de tabelas de contingência, cujo objetivo é resumir uma grande quantidade de dados em um número reduzido de dimensões, com a menor perda de informação possível. Assim, a análise de correspondências múltiplas tem um objetivo semelhante que os métodos fatoriais, porém aplicado a variáveis categóricas. A análise de correspondências constrói uma representação cartesiana com base na associação entre as variáveis analisadas, na qual a proximidade entre os pontos representa o nível de associação entre as variáveis.

Para realizar estas análises convertimos as categorias anteriores em variáveis categóricas e calculamos o coeficiente de contingência entre as mesmas com o software SPSS, versão 18. Na Tabela 2 apresentamos os coeficientes para aquelas variáveis nas quais existe associação em um nível de significação de 5% ( $p < 0,05$ ).

Observamos que a maioria das variáveis é interdependente com diferentes níveis de dependência. Para visualizar melhor as relações existentes entre elas aplicamos a análise de correspondências múltiplas. Na figura 3 aparece o resultado gráfico desta análise, onde as seis variáveis em estudo aparecem discriminadas por dimensões. Pode se observar que as variáveis "conceituação física" (conceituação), "compreensão matemática dos conceitos básicos para esta área do cálculo diferencial" (compmat) e "compreensão física do conceito de diferencial e aplicação apropriada nos problemas" (comfis) estão agrupadas na primeira dimensão, apresentam coeficientes de contingências altos entre elas e são as que mais contribuem para explicar a variação dos dados. Isto corrobora nossa análise dos resultados, no sentido da estreita relação que existe entre estes três

aspectos para a compreensão dos conceitos físicos do grupo de alunos estudados.

	Conceituação física	Compreensão matemática dos conceitos do cálculo diferencial para esta área	Compreensão física do conceito de diferencial e aplicação	Característica resolução de problemas	Visão do papel da Matemática na Física	Rendimento académico neste conteúdo
<b>Conceituação física</b>						
<b>Compreensão matemática dos conceitos do cálculo diferencial para esta área</b>	0,46 p=0,05					
<b>Compreensão física do conceito de diferencial e aplicação</b>	0,46 p=0,05	0,707 p=0,000				
<b>Característica resolução de problemas</b>	0,60 p=0,01	0,55 p=0,01	0,55 p=0,01			
<b>Visão do papel da Matemática na Física</b>	0,57 p=0,03	0,533 p=0,001	0,533 p=0,001	0,719 p=0,000		
<b>Rendimento académico neste conteúdo</b>	0,57 p=0,03			0,690 p=0,001	0,657 p=0,002	

Tabela 2.- Tabela de contingência para as variáveis categóricas em estudo.

Na segunda dimensão aparece mais claramente relacionada com a variável "rendimento académico neste conteúdo" (rendacad). Pode-se observar também, que o rendimento académico parece ser independente das variáveis "compreensão matemática dos conceitos básicos para esta área do cálculo diferencial" e "compreensão física do conceito de diferencial e aplicação apropriada nos problemas" pela distância entre estas variáveis, o que também aparece na tabela de contingência. Isto mostra, para estes estudantes e para este conteúdo em particular, que nem o domínio das técnicas matemáticas nem a compreensão física do mesmo são suficientes para se conseguir resolver de forma eficiente os problemas proposto.

Por outra parte, podemos observar a estreita relação entre as variáveis "característica mais marcante nas estratégias utilizadas na resolução de problemas" (resolpro) e "visão dos estudantes sobre o papel da Matemática na aprendizagem de uma teoria física" (vismat), que contribuem na mesma medida para as duas dimensões. Vemos assim, de forma mais clara, a relação que parece existir entre a forma com que estes estudantes

resolvem os problemas e seu posicionamento epistemológico em relação ao papel das matemáticas na construção do conhecimento físico. E como as duas variáveis vão ter influência tanto na conceituação física que estes alunos alcançam quanto em seu desempenho.

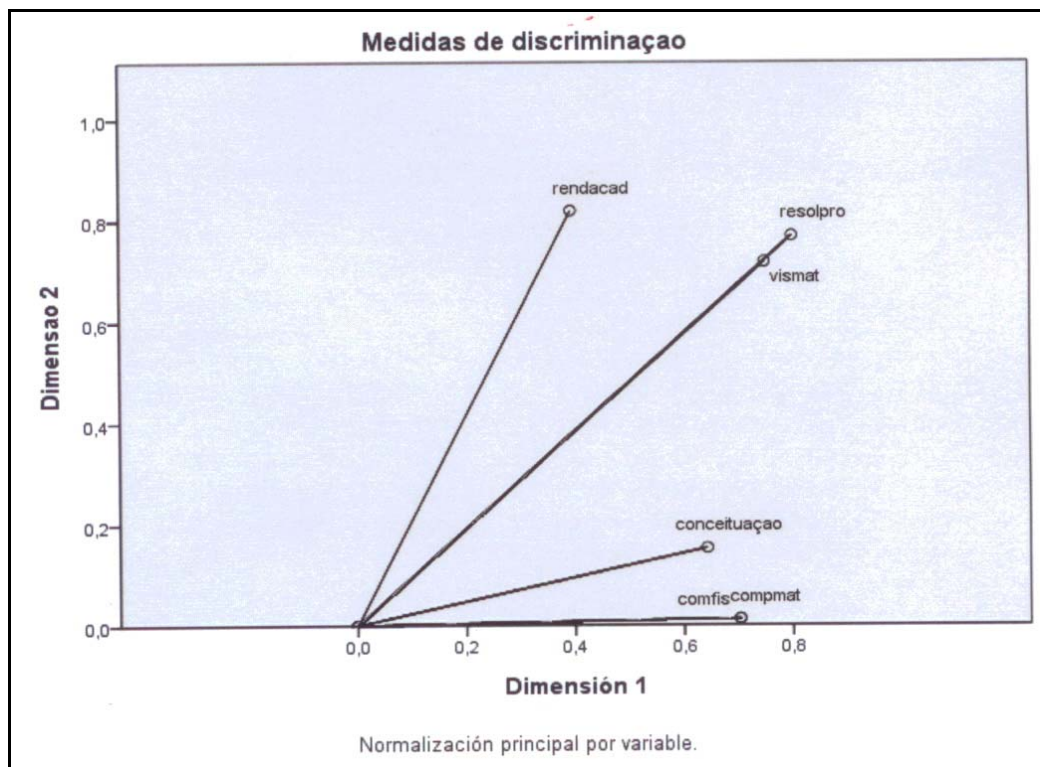


Figura 3.- Representação cartesiana resultante da análise de correspondências múltiplas. Os nomes que aparecem na gráfica correspondem a abreviações dos nomes das variáveis: conceituaçao (conceituaçao física); compmat (compreensao matemática dos conceitos básicos para esta área do cálculo diferencial); comfis (compreensao física do conceito de diferencial e aplicaçao apropriada nos problemas); resolpro (característica mais marcante nas estratégias utilizadas na resoluçao de problemas); vismat (visao dos estudantes sobre o papel da matemática na aprendizagem de uma teoria física); rendacad (rendimento acadêmico neste conteúdo).

### Considerações finais

Se levássemos em consideração somente as dificuldades matemáticas, o entendimento da primeira lei da Termodinâmica, uma equação simples, envolvendo conceitos básicos da Termodinâmica, deveria ser uma tarefa relativamente singela para estudantes avançados do curso de Licenciatura em Física. No entanto, os conceitos apresentados pelos estudantes de nosso estudo, estudantes avançados de um curso de Licenciatura em Física, de modo geral, não satisfazem plenamente a conceituaçao científica e, sobretudo aparece uma grande dificuldade na aplicaçao desta lei, embora já tivessem tido contato com eles na instruçao formal desde o Ensino Médio e dominassem as técnicas matemáticas envolvidas na primeira lei. Por tanto, a primeira lei da Termodinâmica torna-se complexa na sua aplicaçao e essa complexidade pode ser atribuída à falta de compreensao dos estudantes do seu significado, como relata a literatura sobre o assunto, mas também às

dificuldades de compreensão das relações e implicações que sua formalização matemática representa.

As principais dificuldades detectadas para a aplicação da primeira lei estão relacionadas ao uso das equações e modelos matemáticos relacionando-os com a situação física exposta no problema a ser resolvido, mostrando que as habilidades técnicas não são suficientes para saber resolver os problemas. Portanto, nem o domínio das técnicas matemáticas nem a explicação "verbal" de definições e conceitos pareceram garantir para a maioria destes estudantes uma aprendizagem efetiva das leis físicas, o que deveria se manifestar na atividade de avaliação por excelência no ensino de física, que é a resolução de problemas. Ao que parece, olhando para os estudantes melhor sucedidos, é importante a compreensão não apenas dos conceitos ou da matemática isoladamente, mas sim da formalização matemática ligada à construção dos conceitos para que a aprendizagem ocorra de maneira mais efetiva. Como indicado na introdução, a literatura relacionando a compreensão dos conceitos físicos com a compreensão matemática para estudantes do ensino superior não é muito ampla e está centrada fundamentalmente em alunos dos primeiros anos dos cursos da graduação. Este estudo mostra que o problema persiste ainda em alunos avançados da Licenciatura em Física.

Outro ponto muito importante que emerge deste estudo é que parece existir uma forte relação entre a resolução de problemas com a visão que os estudantes têm do papel da Matemática na construção do conhecimento físico. Embora estas visões epistemológicas ou a influência delas na aprendizagem de Física não se constitua em um tema que tenha sido discutido na pesquisa em ensino de ciências, elas parecem influenciar na forma como os estudantes encaram a aprendizagem em Física e especificamente a atividade de resolver problemas. Neste estudo temos encontrado que aqueles estudantes que resolvem problemas por tentativa e erro têm uma visão das matemáticas unicamente como ferramenta da Física. O mais significativo deste resultado é que os estudantes pesquisados estão próximos a se formar como professores e as visões detectadas neste estudo provavelmente estejam consolidadas e sejam aquelas que eles vão repassar, de forma implícita ou explícita, aos seus estudantes. Portanto, pareceria necessário trabalhar não somente técnicas apropriadas de resolução de problemas, mas também, de forma explícita, com suas visões epistemológicas sobre o papel das matemáticas na construção do conhecimento físico.

### **Referências bibliográficas**

Carlton, K. (2000). Teaching about Heat and Temperature. *Physics Education*, 35, 2, 101–105.

Cotignola, M.I.; Bordogna, C.; Punte, G. e O. Cappannini. (2002). Difficulties in Learning Thermodynamic Concepts: Are They Linked to the Historical Development of this Field? *Science & Education*, 11, 279–291.

Coelho, R.L. (2009). On the concept of energy: how understanding its history can improve physics teaching. *Science & Education*, 18, 961–983.

Domert, D.; Airey, J.; Linder, C. e R.L. Kung (2007). An exploration of university physics students' epistemological mindsets towards the understanding of physics equations. *NorDiNa Nordic Studies in Science Education*, 3(1), 15-28.

Goedhart, M.J. e W. Kaper. (2002). From Chemical Energetics to Chemical Thermodynamics. In J.K. Gilbert, O. De Jong, R. Justi, D.F. Treagust and J.H. Van driel (Eds.), *Chemical Education: Towards Research-based Practice*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Greca, I.M. e M.A. Moreira. (2001). Mental models, physical models and mathematical models in the teaching and learning of physics. *Science Education*, 86, 1, 106-121.

Hestenes, D. (2003). Reforming the mathematical language of physics, *American Journal of Physics*, 71, 2, 104-121.

Hudson, H.T. and W.R. McIntiry (1977). Correlation between mathematical skills and success in physics. *American Journal of Physics*, 45 (5), pp. 470-471.

Karam, R.A.S. e M. Pietrocola (2008). Formalização matemática x física moderna no ensino médio: é possível solucionar esse impasse? ANAIS XI EPEF.

Karam, R.A.S. (2007). *Matemática como estruturante e física como motivação: uma análise de concepções sobre as relações entre matemática e física*. Em: VI Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, Florianópolis. Anais do VI ENPEC.

Lozano, S.R. e S. Cárdenas (2002). Some Learning Problems Concerning the Use of Symbolic Language in Physics, *Science & Education* 11, pp. 589-599.

Martinez Torregrosa, J.; López-Gay, R. e A. Gras-Marti (2006). Mathematics in Physics Education: Scanning the Historical Evolution of the Differential to Find a More Appropriate Model for Teaching Differential Calculus in Physics. *Science & Education*, 15, pp.47-462.

Paty, M. (1995). *A matéria roubada*. Sao Paulo: Edusp.

Pietrocola, M. (2010) Mathematics Structural Language of Physics Thought. In: Vicentini, M. & Sassi, E. (Eds). *Connecting Research in Physics Education with Teacher Education*. 2 ed. New Delhi: Angus & Grapher Publishers, v. 2, p. 35-48.

Pietrocola, M. (2002). A Matemática Como Estruturante Do Conhecimento Físico. *Caderno Brasileiro De Ensino De Física*, 19, 1, 88-108.

Pinheiro, T.F.; Pinho-Alves, J. e M. Pietrocola (2001). Modelização de variáveis: uma maneira de caracterizar o papel estruturador da Matemática no conhecimento científico. Em M. Pietrocola (Org.) In: *Ensino de Física: conteúdo, metodologia e epistemologia numa concepção integradora*. (pp. 33-52). Florianópolis: Editora da UFSC.

Quale, A. (2011). On the Role of Mathematics in Physics. *Science & Education*, 20, pp.359-372.

Redish, E. (2005). Problem solving and the use of math in physics courses. Invited Talk Presented At The Conference, World View On Physics Education In 2005:Focusing On Change, Delhi, August 21-26.

Redish, E.F.; Saul, J.M. e R.N. Steinberg (1998) Student Expectations in Introductory Physics, *American Journal of Physics*, 66, pp. 212.

Romer, R.H. (1993). Reading the equations and confronting the phenomems: the delights and dilemas of physics teaching. *American Journal of Physics*, 61 ( 2).

Silva, C.C. e M. Pietrocola (2003). O papel estruturante da matemática na teoria eletromagnética: um estudo histórico e suas implicações didáticas. *Anais do IV Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências*.

Stake, R. (1994). Case Study. Em: N. K. Denzin and Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 236-247). Thousands Oaks, CA: Sage Publications.

Wolcott, H. (1992). Posturing in qualitative research. En LeCompte, M., Millroy, W. y Priessle, J. (Eds.), *The Handbook of Qualitative Research in Education*. (pp. 3-52). Nueva York: Academic Press.

**Anexo I.- Questionário para a identificação das dificuldades na disciplina e na RP, e da visão que os estudantes têm do papel da matemática na resolução dos problemas de física.**

Questionário utilizado para a identificação das dificuldades na aprendizagem da disciplina e especificamente na RP, e da visão que estes estudantes, egressantes do curso de Licenciatura em Física, têm do papel da Matemática na resolução dos problemas de Física.

1. Quais as maiores dificuldades que você tem na aprendizagem de Termodinâmica, e mais especificamente nesta primeira unidade temática?

2. Utilizando suas palavras expresse o que você entende acerca dos conceitos físicos: Temperatura, Trabalho e Energia Interna.

3. O que representa a primeira lei da Termodinâmica? Ainda a respeito desta lei, formalize a expressão que a representa e diga o que significa para você o sinal de igualdade nesta expressão.

4. O que são variáveis microscópicas e macroscópicas e como elas se relacionam dentro do universo da Termodinâmica?

5. Você compreende os conceitos básicos da Matemática (cálculo diferencial) utilizados na compreensão dos conceitos de Termodinâmica? Justifique sua resposta. Qual o significado físico do conceito de diferencial?

7. Você tem problemas quando é necessária a aplicação do conceito de diferencial nos problemas de Termodinâmica?

8. Durante a resolução dos problemas você prioriza o conceitual ou a Matemática? Como utiliza a matemática nesta atividade? Para você qual o papel da Matemática na Física?

**Anexo II.- Descrição das atividades avaliativas, propostas pelo professor referentes à primeira unidade didática, que integra o estudo introdutório à termodinâmica, temperatura, sistemas termodinâmicos, calor e primeira lei da termodinâmica.**

Primeira Atividade:

1 - Descreva temperatura cinética de um sistema sob o ponto de vista microscópico e sob o ponto de vista macroscópico. Qual é a relação entre estas duas visões da temperatura cinética?

2 - Definir e explicar: a) sistema aberto, sistema fechado e sistema isolado. b) processo quase-estático.

3 - Quando as condições para qualquer um dos três tipos de equilíbrio que constituem o equilíbrio termodinâmico não são satisfeitas, o sistema é dito estar num estado de não-equilíbrio. Como é possível encontrar coordenadas termodinâmicas para dar uma descrição ao sistema?

4 - Os estados de equilíbrio de vapor superaquecido são representados pela equação de Callender:

$$v - b = \frac{rT}{P} - \frac{a}{T^m}$$

Onde b, r, A e M são constantes. Expresse o coeficiente de dilatação volumétrica  $\beta$ , como uma função de T e P.

5 - Calcule o trabalho realizado por um mol de gás durante uma expansão isotérmica quase estática, desde um volume inicial  $v_1$  até um volume final  $v_2$ , quando a equação de estado for, onde a e b são as constantes de van de Waals.:



$$P + \left(\frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

6 - a) A tensão num fio metálico é aumentada quase estática e isotermicamente de  $\tau_1$  até  $\tau_2$ . Se o comprimento, a área da seção transversal e o módulo de Young isotérmico do fio metálico permanecem praticamente constantes, demonstre que o trabalho realizado é:

$$W = \frac{L}{2AY}(\tau_2^2 - \tau_1^2)$$

b) A tensão num fio metálico de 1m de comprimento e 0,001 cm<sup>2</sup> de área transversal, é aumentada quase estática e isotermicamente a 20°C de 10 até 100N. Qual é o trabalho realizado se o módulo de Young isotérmico a 20°C é 1.23x10<sup>11</sup>N/m<sup>2</sup>.

Segunda atividade:

1 - Um líquido é agitado irregularmente em um recipiente isolado, e, portanto, sua temperatura aumenta. Considere o líquido como o sistema. Ocorre transferência de calor? Trabalho será realizado neste processo? É importante que a agitação seja irregular? Qual o sinal da variação de energia interna no sistema? Justifique cada uma de suas respostas.

2 - a) Enunciar a primeira lei da termodinâmica; b) Defina capacidade calorífica; c) Descreva o método Rűchhart para medir  $\gamma$ .

3 - O espaço situado entre duas cascas esféricas concêntricas delgadas, de raios de 5 e 15 cm, respectivamente, está ocupado inteiramente com carvão vegetal. Quando se fornece energia num regime permanente de 10,8W a um aquecedor situado no centro, estabelece-se entre as esferas uma diferença de temperatura de 50°C. Ache a condutividade térmica do carvão vegetal.

4 - Considerando que a energia interna de um sistema hidrostático seja uma função de  $t$  e  $P$ , deduza as equações:

$$a) dQ = \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \right] dT + \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T + P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \right] dP$$

$$b) \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = C_p - PV\beta$$

5 - a) Partindo da primeira lei da Termodinâmica e das definições de  $c_p$  e  $c_v$ , mostrar que:

$$c_p - c_v = \left[ P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

Onde  $c_p$  e  $c_v$  são as capacidades específicas de calor por mol em pressão e volume constantes, respectivamente e  $U$  e  $V$  são a energia e volume de um mol.

$$P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

b) Use o resultado encontrado e a expressão para encontrar  $c_p - c_v$  para a equação de gás de van der Waals.

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$